第20講　和の記号Σ，階差数列

§1　和の記号Σ

要点整理 と 公式

要点1 和の記号Σ（シグマ）

数列$\{a_n\}$の「初項」から「第n項」までの和$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$を簡単に表すために，記号Σ（シグマ）を用いて「$\sum_{k=1}^{n} a_k$」と書くことができる。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$$

$\sum_{k=1}^{n} a_k$において，kは1からnまでの整数をとる変数である。この「1」や「n」を変化させることにより，数列$\{a_n\}$のある部分の和を表すことができる。

(ex) $\sum_{k=2}^{5} a_k =$

$\sum_{k=1}^{n} a_k$のa_kは，$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$のようにkの式で表すことができる。このkの式に1を入れたものが数列$\{a_n\}$の初項，nを入れたものが第n項（一般項）であり，1からnまで代入すると，各項を列挙した和の形で表すことができる。

(ex) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = (2\cdot\quad -1) + (2\cdot\quad -1) + (2\cdot\quad -1) + \cdots\cdots + (2\cdot\quad\quad -1)$

$=$

また，各項を列挙した和の形で表された式を，Σを用いて表すことができる。

(ex) $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$

※Σを使った表し方は一つではない。

例えば　$1+2+3+4+5=\sum_{k=1}^{5} k = \sum_{k=2}^{6}(k-1)$　と表すことができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

(1) $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$　　(2) $\sum_{k=1}^{4} (3k+1)$　　(3) $\sum_{m=1}^{n} 2\cdot 3^{m-1}$

［2］　次の式を，Σを用いて表せ。

(1) $2+4+6+8+10$　　(2) $3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2$

Point Pickup

和の記号Σ（シグマ）

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 和の公式とΣの性質

要点整理 と 公式

要点2 自然数の和の公式

1 から n までの自然数の和 $1+2+3+\cdots\cdots+n$ 　は，等差数列 $a_n=n$ 　の初項から第 n 項までの和である。よって，

$1+2+3+\cdots\cdots+n=$

と表される。

また，$1+2+3+\cdots\cdots+n$ は，和の記号 Σ を用いて $\sum_{k=1}^{n}$ 　と表される。

以上より，次の等式が得られる。

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

この等式において，左辺の n を書き換えると，右辺の n も書き換わる。

(ex) $\sum_{k=1}^{5}k=\frac{1}{2}\cdot\quad\cdot$

各項がすべて 2 である数列の初項から第 n 項までの和　$2+2+2+\cdots\cdots+2$　は

$2+2+2+\cdots\cdots+2=$

と表される。また $2+2+2+\cdots\cdots+2$ は，和の記号Σ を用いて $\sum_{k=1}^{n}$ 　と表される。

よって，$\sum_{k=1}^{n}2=2n$ 　である。

項がすべて c である数列に関して，次の等式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n}c=cn$$

要点3 自然数の 2 乗の和の公式

1 から n までの自然数の 2 乗の和　$S=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$　を求める。

等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$　において

$k=1$ のとき　$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$k=2$ のとき　$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$k=3$ のとき　$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$

⋮

$k=n$ のとき $(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

これらの式を辺々加えると

$$(n+1)^3-1=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+1\cdot n$$

$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=S,\quad 1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$　より

$$(n+1)^3-1=3S+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$3S=(n+1)^3-(n+1)-\frac{3}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2(n+1)^3-\frac{1}{2}\cdot 2(n+1)-\frac{1}{2}\cdot 3n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2-2-3n\}=\frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

よって $S=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

つまり　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$である。

また，$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$は，和の記号Σを用いて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ 　と表される。

以上より，次の等式が得られる。

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

この等式において，左辺の n を書き換えると，右辺の n も書き換わる。

(ex) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}k^2=\frac{1}{6}\cdot$　・　・

要点4 Σ の性質

$ca_1+ca_2+ca_3+\cdots\cdots+ca_n=c(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)$ である。

また，$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$ である。

これらの式をΣを用いて表すと，以下の性質が成り立つ。

■Σの性質

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+4)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2)$

Point Pickup

Σの公式と性質

$$\sum_{k=1}^{n}c=cn \qquad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1) \qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

一般的に，Σの計算によって求めた和は，「因数分解」した形で表す。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

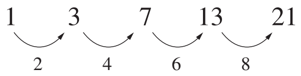
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 階差数列

要点整理 と 公式

要点5 階差数列

数列 1，3，7，13，21，…… において，



隣り合う 2 項の差をとって並べると，

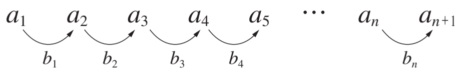
数列 2，4，6，8，…… が得られる。

この数列は，初項 　　，公差 　　 の等差数列である。

数列 $\{a_n\}$ において，隣り合う 2 項の差を項とする数列 $\{b_n\}$ は，

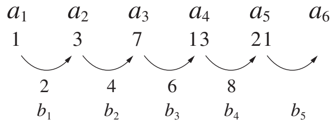
$$a_{n+1} - a_n = b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

と表され，数列 $\{b_n\}$ を



もとの数列 $\{a_n\}$ の「　　　　　　」という。

上の例において，数列 $\{b_n\}$ の一般項は



$b_n =$

である。したがって，

$b_5 =$ 　　 より，$a_6 = a_5 + b_5 = 21 + 10 = 31$

$b_6 =$ 　　 より，$a_7 = a_6 + b_6 = 31 + 12 = 43$

である。

このように，階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより，

$$a_{n+1} = a_n + b_n$$

であることを用いて，もとの数列 $\{a_n\}$ の項を順に求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とする。数列$\{a_n\}$が

$$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots\cdots$$

であるとき，$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

また，a_6，a_7 をそれぞれ求めよ。

Point Pickup

階差数列

数列$\{a_n\}$において，隣り合う2項の差を項とする数列$\{b_n\}$は，

$$a_{n+1}-a_n=b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

と表され，数列$\{b_n\}$をもとの数列$\{a_n\}$の「階差数列」という。

この階差数列$\{b_n\}$の一般項を求めることにより，もとの数列$\{a_n\}$の項を順に求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

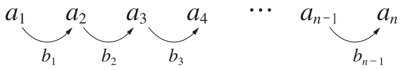
§4 ▶ 階差数列と一般項

要点整理 と 公式

要点 6 階差数列からもとの数列の一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$a_{n+1}=a_n+b_n$ であることより

$a_2=a_1+b_1$



$a_3=a_2+b_2=a_1+b_1+b_2$

$a_4=a_3+b_3=a_1+b_1+b_2+b_3$

である。よって，

$$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}=a_1+b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1}$$

が成り立つ。ここで，$b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1}=$ 　　　　　と表すことができる。

したがって，以下のことが成り立つ。

■ 階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

（ex）数列 1，3，7，13，21，…… の一般項を求める。

この数列を $\{a_n\}$，階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

であり，$b_n=$ 　　　　　　　　　　と表される。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}$$

$$=1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$$

$$=1+(n-1)n=n^2-n+1 \quad \cdots\cdots ①\ である。$$

$a_1=1$ である。また，①において $n=1$ のとき $1^2-1+1=1$ である。

よって，①は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は　$a_n=n^2-n+1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　1, 2, 7, 16, 29, ……　　(2)　3, 4, 7, 16, 43, ……

Point Pickup

階差数列から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \cdots\cdots ①$$

よって，階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め，その初項から第 $n-1$ 項までの和を求めることにより，もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる。

ただし，a_1 は階差数列から求めることはできない。

したがって，①の結果に $n=1$ を代入し，あらかじめ与えられた a_1 と一致するかの確認が必要となる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　確認テスト

1　$\sum_{k=1}^{3}(2k+1)=3+\boxed{ア}+7$　である。

また，$2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+10^2=\sum_{k=\boxed{イ}}^{\boxed{ウエ}}k^2$　である。

2　$\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{1}{\boxed{オ}}n(n+1)(2n+1)$，$\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{1}{\boxed{カ}}n(n+1)$，$\sum_{k=1}^{n}(-3)=\boxed{キク}n$　より

$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k-3)=\dfrac{1}{\boxed{ケ}}n(n-1)(\boxed{コ}n+13)$　である。

3　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。数列 $\{a_n\}$ が 1，2，5，10，17，…… であるとき，

$\{b_n\}$ は 1，3，5，7，…… である。よって，$b_n=\boxed{サ}n-\boxed{シ}$　である。

よって，$b_5=\boxed{ス}$ であることから，$a_6=\boxed{セソ}$　である。

4　数列 $\{a_n\}$ が 2，6，12，20，30，…… であるとき，階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$b_n=\boxed{タ}n+\boxed{チ}$ である。よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\boxed{ツ}+\sum_{k=1}^{n-1}(\boxed{タ}k+\boxed{チ})=n^2+n$$

$a_1=2$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，$a_n=n^2+n$　である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　和の記号Σ，階差数列

1

［1］（1）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-1}$

（2）$\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (3k+1) = (3\cdot 1+1)+(3\cdot 2+1)+(3\cdot 3+1)+(3\cdot 4+1)$

$= 4 + 7 + 10 + 13$

（3）$\displaystyle\sum_{m=1}^{n} 2\cdot 3^{m-1} = 2\cdot 3^0 + 2\cdot 3^1 + 2\cdot 3^2 + \cdots\cdots + 2\cdot 3^{n-1} = 2 + 6 + 18 + \cdots\cdots + 2\cdot 3^{n-1}$

［2］（1）$2+4+6+8+10 = (2\cdot 1)+(2\cdot 2)+(2\cdot 3)+(2\cdot 4)+(2\cdot 5)$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{5} 2k$

（2）$\displaystyle 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots\cdots + n^2 = \sum_{k=3}^{n} k^2$

2

（1）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+4) = \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} 4 = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 4$

$\displaystyle = 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 4n$

$= n(n+1) + 4n$

$= n(n+1+4)$

$= n(n+5)$

（2）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2$

$\displaystyle = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 2n$

$\displaystyle = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}\cdot 9n(n+1) + \frac{1}{6}\cdot 12n$

$\displaystyle = \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 9(n+1) + 12\}$

$\displaystyle = \frac{1}{6}n(2n^2 - 6n + 4)$

$\displaystyle = \frac{1}{3}n(n^2 - 3n + 2) = \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

2，4，8，16，……

である。この数列は，初項 2，公比 2 の等比数列である。

よって，$\{b_n\}$ の一般項は $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ と表される。

したがって

$$a_6 = a_5 + b_5 = 31 + 32 = 63$$

$$a_7 = a_6 + b_6 = 63 + 64 = 127$$

4

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，5，9，13，……

これは，初項 1，公差 4 の等差数列より，$b_n = 1 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 3$ と表される。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-3)$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - 3(n-1)$$

$$= 2n^2 - 5n + 4$$

この式において，$n = 1$ のとき $2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 4 = 1$ である。

$a_1 = 1$より，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は　$a_n = 2n^2 - 5n + 4$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，3，9，27，……

これは，初項 1，公比 3 の等比数列より，$b_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$ と表される。

よって，$n \geqq 2$のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$$

$$= 3 + \frac{1 \cdot (3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$= 3 + \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1) = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{5}{2}$$

この式において，$n = 1$ のとき $\frac{1}{2} \cdot 3^0 + \frac{5}{2} = 3$ である。

$a_1 = 3$ より，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{5}{2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　確認テスト

1 $\sum_{k=1}^{3}(2k+1)=3+\boxed{ア}+7$　である。

また，$2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+10^2=\sum_{k=\boxed{イ}}^{\boxed{ウエ}}k^2$　である。

2 $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{\boxed{オ}}n(n+1)(2n+1)$，$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{\boxed{カ}}n(n+1)$，$\sum_{k=1}^{n}(-3)=\boxed{キク}n$　より

$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k-3)=\frac{1}{\boxed{ケ}}n(n-1)(\boxed{コ}n+13)$　である。

3 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。数列 $\{a_n\}$ が 1，2，5，10，17，…… であるとき，

$\{b_n\}$ は 1，3，5，7，…… である。よって，$b_n=\boxed{サ}n-\boxed{シ}$　である。

よって，$b_5=\boxed{ス}$ であることから，$a_6=\boxed{セソ}$　である。

4 数列 $\{a_n\}$ が 2，6，12，20，30，…… であるとき，階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$b_n=\boxed{タ}n+\boxed{チ}$ である。よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\boxed{ツ}+\sum_{k=1}^{n-1}(\boxed{タ}k+\boxed{チ})=n^2+n$$

$a_1=2$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，$a_n=n^2+n$　である。

{ 解答 }

1	ア　5	イ　2	ウ　1	エ　0		
2	オ　6	カ　2	キ　−	ク　3	ケ　6	コ　4
3	サ　2	シ　1	ス　9	セ　2	ソ　6	
4	タ　2	チ　2	ツ　2			

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。